

Oplossing bij opdracht 3: de circulaire cijfers

Opdracht

Op een dag vroeg Wiske zich af of er een getal zou bestaan dat je exact zou kunnen verdubbelen door simpelweg het laatste cijfer vooraan te schrijven. Bijvoorbeeld, 265 zou hieraan voldoen indien 526 exact het dubbele zou zijn, wat uiteraard niet het geval is.

Na even zoeken, schreeuwde Wiske het uit: "Eureka! Natuurlijk bestaat er zo'n getal, maar het kleinste zulk getal bevat wel 18 cijfers!"

Kunnen jullie met Wiskes hint achterhalen welk het kleinste zulk getal is?

Een oplossingsmethode

We weten van Wiske dat het gezochte getal uit 18 cijfers bestaat. We kunnen het dus schrijven als $abcdefghijklmnpqr$.

We weten ook dat we $abcdefghijklmnpqr$ kunnen verdubbelen door de r vooraan te schrijven:

$$\begin{array}{r} abcdefghijklmnpqr \\ + \quad abcdefghijklmnpqr \\ \hline rabcdefghijklmnpq \end{array}$$

Het getal moet uit 18 cijfers bestaan, dus a kan niet 0 zijn. We zoeken wel het kleinst mogelijke getal, dus proberen we een oplossing te vinden met $a = 1$. Bestaat deze oplossing, dan hebben we het gevraagde getal gevonden. Zo niet, moeten we verder zoeken.

Als $a = 1$, dan moet r minstens 2 zijn. Laten we proberen met $r = 2$:

$$\begin{array}{r} 1bcdefghijklmnpq2 \\ + \quad 1bcdefghijklmnpq2 \\ \hline 21bcdefghijklmnpq \end{array}$$

Het is duidelijk dat $q = 4$:

$$\begin{array}{r} 1bcdefghijklmnp42 \\ + \quad 1bcdefghijklmnp42 \\ \hline 21bcdefghijklmnp4 \end{array}$$

Nu zien we dat $p = 8$:

$$\begin{array}{r} 1bcdefghijklmno842 \\ + 1bcdefghijklmno842 \\ \hline 21bcdefghijklmno84 \end{array}$$

Vervolgens moet $o = 6$ en

$$\begin{array}{r} 1bcdefghijklmn¹6842 \\ + 1bcdefghijklmn6842 \\ \hline 21bcdefghijklmn684 \end{array}$$

Dit kunnen we zo verder zetten tot het einde:

$$\begin{array}{r} 105263157894736842 \\ + 105263157894736842 \\ \hline 210526315789473684 \end{array}$$

Aangezien we niet tot een contradictie komen, is inderdaad $r = 2$, $a = 1$ en is het kleinste gezochte getal 105263157894736842.