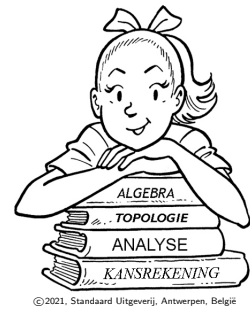


WISKUNNEND WISKE

DE KLEURIGE KOUSEN



OPDRACHT 3

Wiske gaat 10 dagen op vakantie en neemt 10 paar kousen mee. Twee paar is oranje, de andere paren zijn blauw. Elke dag doet ze een paar propere kousen aan, maar dat doet ze niet zomaar. Ze maakt er een spelletje van. Elke ochtend neemt ze willekeurig een paar propere kousen uit haar tas. Hebben de kousen dezelfde kleur als de dag voordien, dan trekt ze deze aan. Zo niet, stopt ze de kousen terug in haar tas en begint opnieuw met de overblijvende propere kousen alsof het dag 1 was. Wiske blijft deze routine volgen tot het einde van haar vakantie, wanneer ze alle 10 paren heeft gedragen.

Bijvoorbeeld, als ze eerst een blauw paar trekt, zal ze die dragen. (Wiske zal namelijk altijd het allereerste paar dat ze trekt dragen.) Als ze de tweede dag opnieuw een blauw paar trekt, zal ze deze ook aandoen. Als het derde paar oranje is, zal ze deze (nog) niet aandoen. In plaats daarvan stopt ze de kousen terug in haar tas. Daarna start ze opnieuw en zal ze het eerste paar dat ze trekt, dragen.

Wat is de kans dat Wiske op haar laatste dag vakantie een oranje paar kousen draagt?

WISKUNDIG WEETJE

Uit een demografisch onderzoek over een grote stad en de omliggende dorpen blijkt dat elk jaar 5% van de inwoners van de stad verhuist naar de omliggende dorpen. Vanuit de omliggende dorpen verhuist elk jaar 7% van de inwoners naar de stad. Indien op het tijdstip van het onderzoek blijkt dat 70 % van de bevolking in de stad woont, en 30% in de omliggende dorpen, kan je dan gemakkelijk de verdeling na 10, 20 of 30 jaar bepalen? De oplossing van een dergelijk vraagstuk kan eenvoudig gevonden worden door gebruik te maken van matrixrekening. De toestanden in dit probleem zijn de verdeling van de bevolking tussen stad en omliggende dorpen. De overgang tussen de toestanden wordt bepaald door de toestandsvector te vermenigvuldigen met de matrix die de jaarlijkse verhuis van de bevolking omschrijft. Een dergelijk systeem wordt in de literatuur een *Markovproces* of *Markovketen* genoemd. Wiskundig gezien bestaat de moeilijkheid erin om een matrix tot een hoge macht te verheffen (in dit geval het aantal jaren dat men vooruit wil rekenen). Dit kan eenvoudig opgelost worden door gebruik te maken van de theorie van eigenwaarden en eigenvectoren. Markovprocessen spelen zich ook af op grafen. Een graaf is een structuur die bestaat uit knopen en verbindingen tussen deze knopen. Het internet kan voorgesteld worden als een graaf, de knopen zijn de verschillende websites, en de links tussen websites zijn de verbindingen tussen de knopen. Ook facebook kan voorgesteld worden door een graaf. Nu zijn de knopen de gebruikers en twee knopen zijn verbonden met elkaar als de gebruikers vriend zijn van elkaar. Het gedrag van een surfer op het internet is dat van een *random walk* op een graaf. Een surfer die zich op een bepaalde pagina bevindt, zal met een zekere kans één van de links vanuit die pagina naar een andere pagina volgen. Na het volgen van vele links zal de gebruiker mogelijks de pagina gevonden hebben die hij zoekt. De meest relevante pagina voor een onderwerp is dus de pagina die de grootste kans heeft om gebruikers op bezoek te krijgen. Dit is het basisidee achter het *Google PageRank algoritme*. De random walk op de graaf die het internet voorstelt, is nu niets anders dan een Markovproces. Het bepalen van de PageRank van een pagina, is dan niets anders dan het bepalen van de kansen van alle pagina's na ...oneindig veel kliks. Google moet natuurlijk geen oneindig lange berekening maken, opnieuw dankzij de theorie van de eigenwaarden en eigenvectoren die ons heel gemakkelijk in staat stelt om deze limietsituatie op een efficiënte wijze te bepalen.