

Wiskunnend Wiske opdracht 2

Klein Seminarie
Vrijheid 234
2320 Hoogstraten

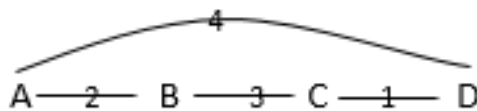
Klas: graadseminarie wiskunde 5^{de} jaar

Oplossing:

Bij 4 computers:

Dit is mogelijk met 4 verbindingen, namelijk:

- I. C – D
- II. A – B
- III. B – C
- IV. A – D



(in de schema's stellen de letters de computers voor en de getallen de volgorde van verbinden)

Eigenschap 1: Bij 4 computers is 4 verbindingen ook het minimum aantal.

Bewijs 1:

Stel er zijn 4 computers: **A, B, C, D**

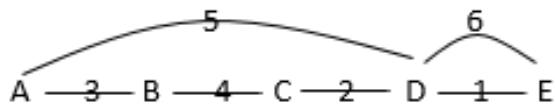
Als je **A** en **B** verbindt, zijn er nog minstens 3 verbindingen nodig om alle informatie van de nog niet verbonden computer **D** door te geven aan de andere computers. Want per verbinding kan de informatie van D aan hoogstens één computer doorgegeven worden.

Dus het aantal verbindingen om alle informatie van 4 computers met elkaar te delen is minstens 4. Omdat we ook hebben laten zien dat het met 4 verbindingen kan, is dit het minimum aantal. ■

Bij 5 computers:

Dit is mogelijk met 6 verbindingen, namelijk:

- I. E – D
- II. C – D
- III. A – B
- IV. B – C
- V. A – D
- VI. E – D

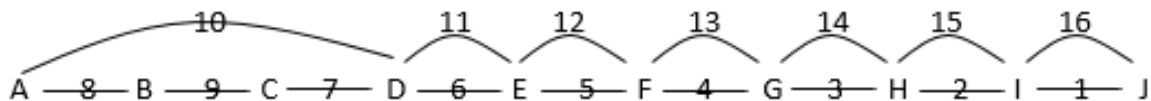


We verbinden dus E en D, dan heeft D alle gegevens van D en E. Dan maken we verbindingen voor A, B, C en D zoals bij 4 computers, zodat deze vier computers alle gegevens van A, B, C, D en E hebben. En tenslotte verbinden we terug D en E om ervoor te zorgen dat ook E alle gegevens heeft.

Bij 10 computers:

Dit is mogelijk met 16 verbindingen, namelijk:

- | | | |
|------------|-------------|-------------|
| I. J – I | VII. C – D | XIII. F – G |
| II. I – H | VIII. A – B | XIV. G – H |
| III. H – G | IX. B – C | XV. H – I |
| IV. G – F | X. A – D | XVI. I – J |
| V. F – E | XI. D – E | |
| VI. E – D | XII. E – F | |



We zorgen eerst dat D alle info heeft van E tot J, dan verbinden we A, B, C en D zoals bij 4 computers en tenslotte geven we alle info terug door aan E tot J.

Om aan te tonen dat dit ook het minimum aantal is, maken we gebruik van de volgende eigenschap.

Eigenschap 2 : Als n computers, met $n > 4$, alle info kunnen doorgeven via m verbindingen, kunnen $n-1$ computers alle info doorgeven met $m-2$ verbindingen.

Bewijs 2:

Stel we hebben de computers $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Stel dat we beginnen met A_1 te verbinden met A_2 . Hierbij gaat de informatie van A_1 naar A_2 . Op een moment moet een computer A_k opnieuw verbonden worden met A_1 zodat A_1 ook informatie van de andere computers dan A_2 krijgt. Als we nu A_1 en A_2 als één computer beschouwen en dat ook doen bij A_1 en A_k betekent dit eigenlijk dat er één computer, nl A_1 , wegvalt. Hierdoor vallen de bindingen A_1-A_2 en A_1-A_k weg en dus zijn er 2 bindingen minder nodig. En dit betekent dat je voor $n-1$ computers dus met $m-2$ bindingen alle gegevens kan doorgeven. ■

We bewijzen nu dat bij 5 computers je minstens 6 bindingen nodig hebt en bij 10 computers minstens 16.

Bewijs: (uit het ongerijmde)

Stel er zijn minder dan 6 bindingen nodig bij 5 computers: $m < 6$.

Dan geldt: 5 computers in m bindingen, dus 4 computers in $m-2$ bindingen. Vermits $m < 6$, is $m-2 < 4$. Dit betekent dat 4 computers in minder dan 4 stappen met elkaar verbonden kunnen worden. Dit gaat in tegen eigenschap 1 en is dus niet mogelijk.

Stel er zijn minder dan 16 bindingen nodig bij 10 computers: $m < 16$

Dan geldt: 10 computers in m bindingen, dus 4 computers in $m-12$ bindingen. (6 keer eigenschap 2 toepassen). Dit betekent dus opnieuw dat 4 computers in minder dan 4 stappen met elkaar verbonden kunnen worden wat niet mogelijk is. (eigenschap 1). ■

Omdat we aangetoond hebben dat je voor 5 computers alle info kan doorgeven met 6 verbindingen en dat je minstens 6 verbindingen nodig hebt, is 6 verbindingen het minimum aantal. Op dezelfde manier geldt dat het minimum aantal voor 10 computers 16 is.