School: `Sint-Romboutscollege`

Adres: `Veemarkt 56, 2800 Mechelen`

Klas: `6 GrWi-LaWi-WeWi`

Opdracht 3: De tantaliserende tanden

1. Stel x gelijk aan het aantal tanden dat gedraaid moet worden en neem a_i het aantal volledige omwentelingen dat het i-de tandwiel draait. Om de letters SUSKE te krijgen, moet het volgende stelsel een oplossing over $\mathbb{N}$ hebben:

$$\begin{cases} 7a_1 + 1 = x \\ 6a_2 + 1 = x \\ 5a_3 = x \\ 5a_4 + k = x \\ 11a_5 + l = x \end{cases}, \text{ met } k \in \{0,4\} \text{ en } l \in \{0,1\}$$

Uit de derde vergelijking volgt dat x een veelvoud van 5 is, dus moet $k = 0$. We lossen dit stelsel op met de methode van Gauss-Jordan en krijgen:

$$\begin{cases} x = 11a_5 \\ a_1 = \frac{11a_5 - 1}{7} \\ a_2 = \frac{11a_5 - 1}{6} \\ a_3 = \frac{11a_5}{5} \\ a_4 = \frac{11a_5}{5} \end{cases} \text{(als } l = 0\text{)} \qquad \text{en} \qquad \begin{cases} x = 11a_5 + 1 \\ a_1 = \frac{11a_5}{7} \\ a_2 = \frac{11a_5}{6} \\ a_3 = \frac{11a_5 + 1}{5} \\ a_4 = \frac{11a_5 + 1}{5} \end{cases} \text{(als } l = 1\text{)}$$

We werken beide stelsels verder uit:

- Geval $l = 0$:
Uit de laatste twee vergelijkingen volgt dat a_5 een deler van 5 is. Dus is $a_5 = 5b$, met $b \in \mathbb{N}$. Uit de tweede en derde vergelijking volgt dan dat $55b - 1$ deelbaar moet zijn door 7 en door 6, en dus door $6 \cdot 7 = 42$. De kleinste waarde van b waarvoor dit zo is, is 13. Dit geeft

$$x = 11a_5 + 1 = 11 \cdot 5 \cdot 13 = 715$$

- Geval $l = 1$:
Uit de tweede en derde vergelijking volgt dat a_5 deelbaar is door 6 en door 7, en dus door 42. Dus is $a_5 = 42c$, met $c \in \mathbb{N}$. Uit de vierde en vijfde vergelijking volgt dat $11 \cdot 42c + 1$ deelbaar moet zijn door 5. De kleinste waarde van c waarvoor dit zo is, is 2. Dit geeft

$$x = 11 \cdot 42 \cdot 2 + 1 = 925$$

We besluiten dat Wiske het linkse tandwiel 715 tanden in tegenwijzerzin moet verdraaien.

2. Om de letters JEROM te krijgen, moet het volgende stelsel een oplossing over $\mathbb{N}$ hebben:

$$\begin{cases} 7a_1 + 4 = x \\ 6a_2 + 5 = x \\ 5a_3 + 3 = x \\ 5a_4 + 3 = x \\ 11a_5 + 8 = x \end{cases}$$

Als we dit stelsel oplossen met de methode van Gauss-Jordan, vinden we

$$\begin{cases} x = 11a_5 + 8 \\ a_1 = \frac{11a_5+4}{7} \\ a_2 = \frac{11a_5+3}{6} \\ a_3 = \frac{11a_5+5}{5} \\ a_4 = \frac{11a_5+5}{5} \end{cases}$$

Omdat $a_3, a_4 \in \mathbb{N}$, volgt uit de laatste twee vergelijkingen dat a_5 een veelvoud van 5 moet zijn. a_5 is dus van de vorm $5 \cdot b$, met $b \in \mathbb{N}$. De derde vergelijking van het stelsel wordt dan

$$a_2 = \frac{55b+3}{6}$$

Omdat $55b + 3$ deelbaar moet zijn door 6, moet b oneven zijn en deelbaar door 3. b is dus van de vorm $3 + 6c$, met $c \in \mathbb{N}$. Vullen we dit in bij de tweede vergelijking van het stelsel, dan vinden we

$$a_1 = \frac{11(5(3+6c))+4}{7} = \frac{169+330c}{7}$$

De kleinste waarde voor c waarvoor $169 + 330c$ deelbaar is door 7, is 6. Hieruit volgt dat

$$x = 11 \cdot 5 \cdot (3 + 6 \cdot 6) + 8 = 2153$$

Wiske moet dus het linkse tandwiel 2153 tanden in tegenwijzerzin verdraaien.