Wiskunnend Wiske 2016-2017 - Opdracht 1

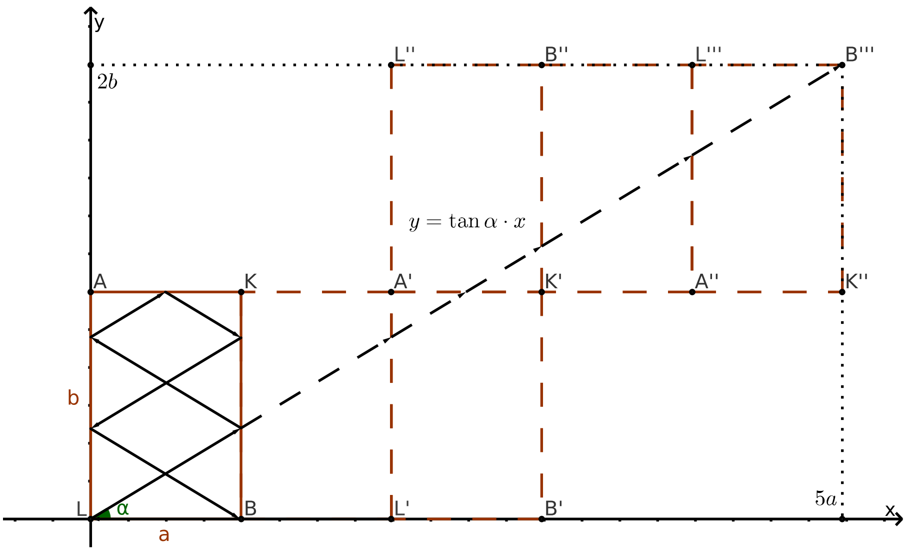
Sint-Pieterscollege Leuven - klas 5-6-wiskunde

1 Probleemstelling

Lambik bevindt zich vastgebonden in de hoek van een rechthoekige zaal met afmetingen van 99 meter op 101 meter. In de zaal bevindt zich echter ook een dodelijke laserstraal die hem over exact 150 seconden zal raken, tenzij hij erin slaagt de uitknop, die zich in de overstaande hoek van de zaal bevindt, te raken met de straffe stuitbal van professor Barabas. Dit laatste is een balletje dat met een constante snelheid van 100 meter per seconde volgens perfecte reflecties van de wanden terug botst met de invalshoek gelijk aan de weerkaatsingshoek. Lambik schiet het balletje af onder een hoek van 45°, horizontaal. Zal de straffe stuitbal de knop ooit bereiken? Zo ja, hoeveel keer zal hij tegen de muur botsen en zal hij op tijd zijn om Lambik van de laserstraal te redden? Zal de bal het knopje bereiken als Lambik hem onder een hoek van 30° afschiet?

2 Algemene oplossing

Beschouw de zaal waarin Lambik zich bevindt, bekeken vanuit bovenaanzicht, met afmetingen (a, b). Zij Lambik de oorsprong van een cartesiaans assenstelsel met de assen parallel aan de muren, dan is het pad van de straffe stuitbal te schrijven als de rechte $y = \tan\alpha \cdot x$. De vergelijking geldt echter maar tot aan de eerste botsing met de muur. In plaats van het pad van de straffe stuitbal na die eerste botsing aan te passen, spiegelen we de hele zaal om de muur waartegen de straffe stuitbal botst. De uitdrukking voor het pad blijft zo bewaard (zie Figuur 1).



Figuur 1: Twee manieren om het pad van de straffe stuitbal te bekijken

We herhalen dit bij elke botsing tegen een muur, namelijk telkens als een van de coördinaten van de bal een geheel veelvoud is van de lengte van de zaal in die dimensie, dus als $x = a \cdot m$ of $y = b \cdot n$ met $m, n \in \mathbb{N}$. Hierbij blijven twee van de hoekpunten van de zaal op dezelfde plaats staan en worden de twee andere gespiegeld naar boven of naar rechts. Spiegelen we de zaal twee keer in dezelfde richting, dan krijgen we weer de originele oriëntatie. Als we weten dat de bal in een hoekpunt met coördinaten $(a \cdot m, b \cdot n)$ botst, dan kunnen we in volgende pariteitstabel aflezen om welk hoekpunt het dan gaat:

n \ m	even	oneven
oneven	hoekpunt A	knop
even	Lambik	hoekpunt B

Nu zoeken we een manier om te bepalen in welk hoekpunt de bal eerst botst en welke coördinaten die dan heeft. De straffe stuitbal botst in een hoekpunt als hij tegelijkertijd tegen twee zijden botst, dus als beide coördinaten van de bal een geheel veelvoud zijn van de zijden, dus als volgend stelsel geldt:

$$\begin{cases} y = \tan\alpha \cdot x \\ x = a \cdot m \\ y = b \cdot n \end{cases}$$

De kleinste oplossing voor $m, n \in \mathbb{N}_0$ van dit stelsel geven ons de waarden m, n van het eerste hoekpunt waarin de bal botst. Uit die waarden kunnen we dan ook x en y, de bijbehorende coördinaten, berekenen. Het aantal botsingen is gelijk aan het aantal spiegelingen in beide richtingen. In de x-richting zijn dit $m-1$ botsingen, in de y-richting zijn dat er $n-1$. Het totale aantal botsingen is dus $(m-1)+(n-1) = m+n-2$. De afstand die de straffe stuitbal aflegt tot dat hoekpunt kunnen we berekenen met de afstandsformule, de totale afstand is dan $\sqrt{x^2+y^2}$.

3 Specifieke deelvragen oplossen

3.1 $\alpha = 45°$

We kunnen nu het voorgaande stelsel invullen met $\alpha = 45°$ en $(a, b) = (99, 101)$. We krijgen dan het volgende stelsel waarvan we de kleinste oplossing zoeken:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 101 \cdot n \\ x = 99 \cdot m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 101 \\ n = 99 \\ x = y = 9999 \end{cases}$$

Nu kunnen we in de pariteitstabel gaan kijken in welk hoekpunt de bal terecht komt: omdat m en n beide oneven zijn, gaat het om het hoekpunt waar de knop zich bevindt. De straffe stuitbal zal de knop dus bereiken. De bal zal $m+n-2 = 99+101-2 = 198$ keer gebotst zijn tegen een muur. Hij zal een afstand van $\Delta x = \sqrt{9999^2+9999^2} = 9999\sqrt{2}$ meter afleggen. De tijd die hij erover doet is gelijk aan $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{9999}{100}\sqrt{2} \approx 141.7$ seconden, wat genoeg tijd is om de laserstraal te ontvluchten.

3.2 $\alpha = 30°$

Als Lambik de straffe stuitbal afschiet onder een hoek van 30° verkrijgen we analoog het stelsel

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x \\ y = 101 \cdot n \\ x = 99 \cdot m \end{cases}$$

Aangezien $x, y \in \mathbb{N}$ en x een irrationaal veelvoud is van y heeft dit stelsel enkel de nuloplossing. De stuitbal zal dus nooit in een andere hoek dan de hoek waarin hij vertrokken is terechtkomen. Lambik zal het helaas niet overleven.