Isar Goyvaerts

Abstract

Lie algebras play a prominent role in a large number of different branches of mathematics. In the past decades, various generalizations -in different directions- of this algebraic structure have appeared in literature. Motivated by the way the field of Hopf algebra theory benefited from the interaction with the theory of monoidal categories on the one hand, and the strong relationship between Hopf algebras and Lie algebras on the other hand, the natural question arose whether it is possible to study Lie algebras within the framework of monoidal categories, and whether Lie theory could also benefit from this point of view.
Some of these connections between the above-mentioned theories can be described by means of certain duality theorems. The concept of duality -in a broad sense- and certain types of autodual objects in particular, are of considerable interest in the more general setting of monoidal categories.
The main goal of this work is, roughly speaking, twofold. On the one hand, we wish to establish different types of dualities for generalized Lie (and Hopf) algebras; as Lie (and Hopf) algebras allow for a study in general additive, symmetric monoidal categories, one can expect the afore-mentioned duality results to be extended to this more abstract setting, allowing to formulate duality theorems for those generalized structures which are not covered by the classical approach. On the other hand, and of a slightly different nature, we propose a study of a particular type of autodual objects in certain braided monoidal categories, which are in close connection to quadratic modules. The chief aim here is to provide a tool which can be used to understand some aspects of the structure of categories of representations of finite groups.

Lie-algebra's spelen een voorname rol in een verscheiden aantal wiskundige disciplines en ook in andere gebieden van de wetenschap; we denken met name aan de talrijke toepassingen in sommige gebieden van de theoretische natuurkunde.
In de voorbije decennia zijn verschillende veralgemeningen van deze algebraïsche structuur opgedoken in de vakliteratuur. Het is een gegeven dat de theorie van de Hopf-algebra's voortdurende verrijkt werd (en wordt) door de interactie met de monoïdale categorietheorie enerzijds en de sterke verbanden tussen Hopf- en Lie-algebra's anderzijds. Dit deed de natuurlijke vraag rijzen of het mogelijk is om Lie-algebra's te bestuderen binnen een monoïdaal categorisch raamwerk en of dit de Lie-theorie ten goede zou komen.
Sommige van de connecties hierboven vermeld kunnen beschreven worden d.m.v. zekere dualiteitsstellingen. Het concept "dualiteit" in ruime zin en specifieke types van zelfduale objecten in het bijzonder, zijn van aanzienlijk belang in de meer algemene setting van de monoïdale categoriën.
De doelstellingen van deze thesis zijn, in dit licht bekeken, tweeledig. Enerzijds wensen we verschillende types dualiteiten voor veralgemeende Lie- (en Hopf-) algebra's te bewerkstelligen. Aangezien deze zich goed blijken te lenen om bestudeerd te worden in algemeen additieve, symmetrische monoïdale categoriën, kan men verwachten dat de hierboven vermelde dualiteitsresultaten uitgebreid kunnen worden naar dit abstracte raamwerk. Hieruit kunnen dan

dualiteitsstellingen gedestilleerd worden voor zulke veralgemeende structuren die niet in de klassieke benadering vervat zitten.
Anderzijds, en van een lichtjes ander alooi, stellen we voor om een bepaald type zelfduale objecten in zekere vervlochten monoïdale categoriën te bestuderen, die nauw verwantschap vertonen met kwadratische modulen. De ambitie is hier om gereedschap te voorzien dat gebruikt kan worden om sommige aspecten van de structuur van categoriën van representaties van eindige groepen beter te begrijpen.