

Opdracht: 2
School: Sint-Jozefcollege Turnhout
Klas: 6LWA-6GWA-6WWA (Latijn-wiskunde/Grieks-wiskunde/wetenschappen-wiskunde)

Wiskunnend Wiske: opdracht 2: De bonte bollebozen

Opdracht: Na hoeveel dagen waren alle bollebozen dood? En bewijs dit.

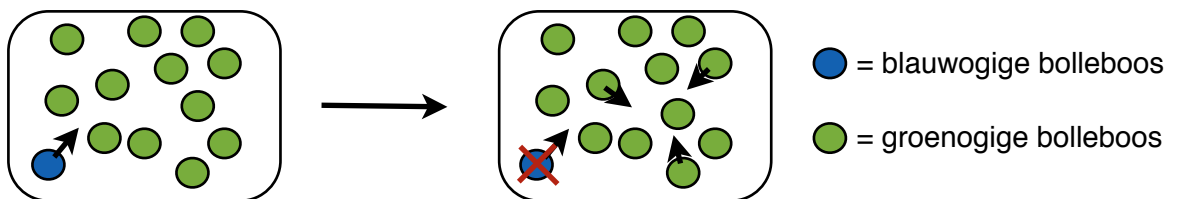
Oplossing: Alle bollebozen zijn dood na n dagen, waarbij n gelijk is aan het aantal bollebozen met blauwe ogen. Met uitzondering van het geval waarbij er alleen maar bollebozen met blauwe ogen zijn, dan zijn ze allemaal dood na $(n-1)$ dagen.

Bewijs:

We bewijzen dat de stelling geldt door middel van volledige inductie.

1) De stelling is juist voor $n=1$
want,

als er 1 blauwogige bolleboos is, ziet deze enkel groenogige bollebozen en hij weet dus zeker dat hij de blauwe ogen heeft. Ah ja, want Lambik had laten uitschijnen dat er minstens één blauwogige bolleboos was. Deze bolleboos sterft dus diezelfde dag nog op klokslag 12 uur, we noemen dit tijdstip t_0 en zeggen dat deze bolleboos nog dezelfde dag gestorven is. De volgende dag zien de andere bollebozen dat de enige blauwogige bolleboos die zij zagen gestorven is, wat betekent dat hij zeker wist dat hij blauwe ogen had. Dat kon hij alleen maar geweten hebben als hij alleen maar groenogige bollebozen zag. Dat betekent dat zij allemaal groene ogen hebben. Alle groenogige bollebozen sterven dus op tijdstip t_1 , na 1 dag = na n dagen.



2) We veronderstellen dat de stelling waar is voor n en tonen aan dat ze dan ook waar is voor $n+1$.

Elk van deze $(n+1)$ blauwogige bollebozen ziet n andere bollebozen met blauwe ogen. Als die n de enige blauwogige bollebozen waren, zouden ze volgens onze stelling moeten sterven op t_{n-1} , na $(n-1)$ dagen. Echter, al die blauwogige bollebozen zien ook n andere blauwogige bollebozen. Ze denken dus allemaal dat alle blauwogige bollebozen zullen moeten sterven op t_{n-1} . Maar omdat ze allemaal denken dat de anderen moeten sterven op t_{n-1} , is er dus niemand die dan weet dat hij zal sterven. Alle blauwogige bollebozen leven dus nog na t_{n-1} , waardoor ze allemaal te weten komen dat er geen n maar $(n+1)$ blauwogige bollebozen zijn. Ze zien er allemaal maar n dus ze weten dat ze zelf ook blauwe ogen hebben. Alle blauwogige bollebozen sterven dus op t_n . Hierdoor weten de overblijvende bollebozen dat ze groene ogen hebben en ze sterven dus op t_{n+1} , na $(n+1)$ dagen!

3) Door toepassing van de inductiehypothese is de stelling bewezen. QED
