

OPDRACHT 2 PIUS X INSTITUUT ZELE

Kapellestraat 7 te 9240 Zele
 KLAS 6A6 (lat-wisk 6u wisk)

Wiskunnend Wiske: opgave 2: De bonte Bollebozen

Stap 1: De zekerheid

Lambik komt op het eiland en is de enige (de wijze schildpad buiten beschouwing gelaten) die alle ogen ziet. Hij zegt: “een blauwogige bolleboos die ik vanmiddag sprak...”. M.a.w. er is minstens één bolleboos met blauwe ogen. Lambik sluit dus één mogelijkheid uit: allemaal groene ogen, kan niet. Deze zekerheid neemt bij de bollebozen stuk voor stuk hun twijfels weg en ze beginnen te redeneren. Een zekerheid neemt alle twijfels weg.

Stap 2: De bollebozen met groene ogen sterven één dag later

Stelling: Bollebozen met groene ogen sterven altijd één dag later dan bollebozen met blauwe ogen.

Denkwijze: Op het eiland zijn er twee groepen. Je hebt de blauwogige en de groenogige bollebozen. Alle bollebozen met dezelfde kleur ogen sterven samen. Ze zien namelijk hetzelfde aantal groene en hetzelfde aantal blauwe ogen. Dit houdt in dat ze dus dezelfde denkwijze hebben per groep en dat ze dus ook per groep op dezelfde dag sterven.

Als de groenogigen op een dag zien dat alle blauwogigen gestorven zijn, weten ze dat ze groen zijn. Want als ze blauwe ogen zouden hebben, zouden ze immers gestorven zijn. De groenogigen sterven de volgende nacht. De stelling klopt.

Schildpad					
Dag					
1 ^e nacht	+				
dag					
2 ^e nacht		+	+		
dag					
3 ^e nacht				+	+
dag					
4 ^e nacht					+
dag					
n ^e nacht					+
n+1 dag					
n+1 nacht					+

Stap 3: Het algemene bewijs

Legende:
 bollebozen met groene ogen
 bollebozen met blauwe ogen

+ : bollebozen sterven

Uit deze figuur leiden we de volgende stelling af:

Stelling: Ongeacht een bolleboos groene of blauwe ogen heeft, als hij n blauwogige bollebozen ziet, dan sterft hij de $n + 1$ de nacht.

We bewijzen deze bewering aan de hand van algemene inductie.

1. Uit de figuur kunnen we afleiden dat de bewering klopt voor $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ en $n = 3$.
2. We nemen aan dat de stelling waar is als ik $n - 1$ blauwogige bollebozen zie en we bewijzen nu dat de stelling waar is als ik n blauwogige bollebozen zie.

Ik zie n blauwogige bollebozen, er zijn dus twee mogelijkheden:

1. Er zijn n blauwogige bollebozen als ik groene ogen heb.
2. Er zijn $n + 1$ blauwogige bollebozen als ik blauwe ogen heb.

Als ik n blauwogige bollebozen zie, dan weet ik dat ik zeker nog n dagen te leven heb. Op de n^{de} dag denk ik: als ik groene ogen heb, dan zullen morgen alle blauwogigen dood zijn (dan bevind ik mij in het vorige geval). Als ik echter de volgende ochtend opsta, zie ik dat alle blauwogigen nog leven. Daaruit redeneer ik dat ik dus geen groene ogen heb, maar blauwe ogen. Ik sterf de $n + 1^{\text{de}}$ nacht.

Conclusie

Er zijn 2 mogelijkheden op het eiland na de uitspraak van Lambik:

- er zijn enkel blauwogige bollebozen op het eiland: Als er n blauwogige bollebozen rondlopen op het eiland, dan zijn alle bollebozen dood na de n^{de} nacht. (aangezien alle bollebozen blauwe ogen hebben en dus $n - 1$ blauwogige bollebozen zien.)
- Er zijn zowel blauwogige als groenogige bollebozen op het eiland: de groene bollebozen sterven laatst (zie stap 2). Als er n blauwogige bollebozen zijn op het eiland, zien de groenogigen n blauwogige bollebozen en sterven dus op de $n + 1^{\text{de}}$ nacht. Alle bollebozen zijn in dit geval dus dood na de $n + 1^{\text{de}}$ nacht.