Mohammadhossein SHAHZAMANIANCICHANI

Abstract

Wij bestuderen semigroepen die voldoen aan een identiteit, de identiteit van Malcev. De meest eenvoudige voorbeelden zijn commutatieve semigroepen, deze voldoen aan de identiteit $XY=YX$. Een ander zeer bekend voorbeeld zijn de unipotente bovendriehoeksmatrices, indien deze van graad drie zijn dan voldoen die aan de identiteit $X_{1} Y_{1} X_{2} Y_{2} X_{2}Y_{1}X_{1} = X_{2}Y_{1}X_{1} Y_{2} X_{1}Y_{1}X_{2}$. Of nog algemener is de klasse van nilpotente groepen en hun deelsemigroepen.

In deze thesis bestuderen wij de semigroepen die bijna nilpotent zijn in de zin van Malcev en associ\"eren wij met een willekeurige eindige semigroep een aantal grafen en onderzoeken verbanden tussen de algebra\"{i}sche structuur van de semigroep en de graafeigenschappen. De thesis bestaat uit drie hoofdstukken. Eerst geven wij een beschrijving van de eindige semigroepen die minimaal niet-nilpotent zijn. Vervolgens associ\"{e}ren wij een graaf ${mathcal N}_{S}$ met een semigroep S (wij noemen dit de bovenste niet-nilpotent graaf van S). De knopen van de graaf zijn de elementen van S en er is een boog tussen twee knopen als deze elementen een niet-nilpotente (in de zin van Malcev) semigroep voortbrengen. Deze graaf werd eerder ingevoerd door A. Abdollahi en M. Zarin in het geval dat S een groep is. Zij bewezen enkele merkwaardige eigenschappen. Wij tonen aan dat als S een eindige semigroep is met lege bovenste niet-nilpotente graaf dan is S positief Engel. Aan de andere kant heeft een semigroep een volledige bovenste niet-nilpotente graaf als en slechts als de semigroep volledig eenvoudig is en bovendien een band is. Een van de hoofdresultaten zegt dat als alle ${mathcal N}_{S}$-samenhangscomponenten van een semigroep S volledig zijn (met tenminste twee elementen) dan is S een band en een halftralie van zijn samenhangscomponenten; bovendien is S een herhaalde totale ideaaluitbreiding van zijn samenhangscomponenten. Wij tonen ook aan dat sommige grafen geen bovenste niet-nilpotent graaf zijn van een semigroep, zoals o.a. de cykel C_{n} met n knopen (en met $ngeq 5$).

Ook is er precies een graaf met 4 knopen die niet de bovenste niet-nilpotente graaf is van een semigroep met 4 elementen. In het derde gedeelte defini\"{e}ren wij een nieuwe klasse van semigroepen, de pseudo-nilpotente semigroepen, waarin de Malcev nilpotentie ge\"{e}rfd wordt uit ideaalketens. De definitie is zodanig dat de globale informatie dat een semigroep niet nilpotent is bepaald wordt door lokale informatie, d.w.z. zekere twee-voortbrengende semigroepen zijn niet nilpotent. Wij bewijzen dat een eindige mono \"{i}de (i.h.b. een eindige groep) pseudo-nilpotent is als en slechts als deze nilpotent is. Het belangrijkste resultaat is een beschrijving van pseudo-nilpotente eindige semigroepen in functie van hun geassocieerde graaf ${mathcal N}_{S}$. Zo heeft S een grootste nilpotent ideaal, zeg K, en het Rees quoti\"ent S/K is een $0 $-disjuncte unie van zijn samenhangscomponenten (met een nul aan toegevoegd) die tenminste twee knopen hebben.

Mohammadhossein SHAHZAMANIANCICHANI

Abstract

We study semigroups which satisfy an identity, the identity of Malcev.
The easiest examples are commutative semigroups, which satisfy the identity $XY=YX$. An other well known example is the unipotent upper triangular matrices, if these are of degree 3 then they satisfy the identity $X_{1} Y_{1} X_{2} Y_{2} X_{2}Y_{1}X_{1} = X_{2}Y_{1}X_{1} Y_{2} X_{1}Y_{1}X_{2}$. Or more general is the class of nilpotent groups and their subsemigroups.

In this thesis we study semigroups which are almost nilpotent in the sense of Malcev and we associate with an arbitrary finite semigroup several graphs and investigate connections between the algebraic structure of the semigroup and properties of the graph.

This thesis includes three chapters. First, we give a description of the finite semigroups that are minimal for not being Malcev nilpotent. Second, we associate a graph ${\mathcal N}_{S}$ with a semigroup S (called the upper non-nilpotent graph of S). The vertices of this graph are the elements of S and two vertices are adjacent if they generate a semigroup that is not nilpotent (in the sense of Malcev). In case S is a group this graph has been introduced by A. Abdollahi and M. Zarrin and some remarkable properties have been proved. We show that if a finite semigroup S has empty upper non-nilpotent graph then S is positively Engel. On the other hand, a semigroup has a complete upper non-nilpotent graph if and only if it is a completely simple semigroup that is a band. One of the main results states that if all connected ${\mathcal N}_{S}$-components of a semigroup S are complete (with at least two elements) then S is a band that is a semilattice of its connected components and, moreover, S is an iterated total ideal extension of its connected components. We also show that some graphs, such as a cycle C_{n} on n vertices (with $n\geq 5$), are not the upper non-nilpotent graph of a semigroup. Also, there is precisely one graph on 4 vertices that is not the upper non-nilpotent graph of a semigroup with 4 elements. Third, we introduce a class of semigroups in which the Mal'cev nilpotent property lifts through ideal chains. We call this the class of \B\ semigroups. The definition is such that the global information that a semigroup is not nilpotent induces local information, i.e. some two-generated subsemigroups are not nilpotent. It turns out that a finite monoid (in particular, a finite group) is \B\ if and only if it is nilpotent.

Our main result is a description of \B\ finite semigroups S in terms of their associated graph ${\mathcal N}_{S}$. In particular, S has a largest nilpotent ideal, say K, and S/K is a 0-disjoint union of its connected components (adjoined with a zero) with at least two elements.