

De sportieve selectie

Opgave

In een sportteam van m mannen en $m + 1$ vrouwen, moet een ploeg samengesteld worden van $m - 1$ personen voor een toernooi. De trainer beslist om willekeurig teamgenoten te selecteren uit de totale groep van $2m + 1$ personen. Hij beweert dat de kans dat er geen man geselecteerd wordt, vijfmaal zo groot is als de kans dat er geen vrouw wordt geselecteerd, en hij heeft nog gelijk ook. Hoe groot is de totale sportgroep precies?

Oplossing

De uitspraak dat de kans op geen man in de selectie vijfmaal zo groot is als de kans op geen vrouw is equivalent met de uitspraak dat het aantal mogelijkheden om $m - 1$ vrouwen te kiezen gelijk is aan vijf keer het aantal mogelijkheden om $m - 1$ mannen te kiezen.

Het aantal combinaties van k elementen uit een verzameling van n elementen wordt genoteerd als de binomiaal-coëfficiënt

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Er zijn m mannen en $m + 1$ vrouwen. Bovenstaande uitspraak is dus equivalent met

$$\binom{m+1}{m-1} = 5 \binom{m}{m-1} \Leftrightarrow \frac{(m+1)!}{(m-1)!2!} = 5 \frac{m!}{(m-1)!}.$$

Wanneer we deze breuk vereenvoudigen, vinden we $(m+1)! = (m+1)m! = 10m!$, en dus is $m+1 = 10$. Bijgevolg is $m = 9$ en is de totale sportgroep gelijk aan $2m+1 = 19$.