...atheneum

5des en 6des van de module

Wetenschappelijke vaardigheden

Begeleidende leerkrachten: A. Baeyens en N. Keppens

Opdracht 3 - De kleurige kousen

Oplossing:
We verkenden de situatie eerst door een kansboom te proberen opstellen. Dit is echter niet praktisch, het gaf ons echter wel het nodige inzicht in de kansen en mogelijke situaties.

Notaties: B_n = blauw paar op dag n. O_n = oranje paar op dag n.

Voor de eerste dag vinden we $P(B_1) = \frac{8}{10}$ en $P(O_1) = \frac{2}{10}$.

Vanaf dag 2 moeten we rekening houden met de kleur van kousen die Wiske de vorige dag aanhad.

$$P(O_2|B_1) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{4}{81} \quad \text{en} \quad P(B_2|B_1) = \frac{7}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{77}{81}.$$

Een blauwe kous op dag 2 kan op twee manieren: ofwel trekt ze de tweede dag direct een nieuw blauw paar (kans is $\frac{7}{9}$), en dan trekt ze dit paar aan. Ofwel trekt ze eerst een oranje paar (kans $\frac{2}{9}$), dit paar legt ze terug en nadien trekt ze een blauw paar. Je kan echter de kans $P(B_2|B_1)$ ook schrijven als $1 - P(O_2|B_1)$ dan vergeet je zeker geen situatie. We zullen hier gebruik van maken bij de verdere berekeningen.

Er zijn maar 9 mogelijke scenario's waarbij Wiske op de laatste dag een oranje paar kousen draagt. We lijsten hieronder alle mogelijkheden op en berekenen telkens de kans dat dit scenario zich voordoet.

1: BBBBBBBBOO (eerst draagt ze 8 dagen blauwe kousen, de laatste 2 dagen draagt ze oranje.)

We bekijken nu dag per dag de kans op die bepaalde kleur rekening houdend met de kleur van de vorige dag en het aantal kousen dat er van elke kleur nog over is op die dag. Vervolgens vermenigvuldigen we deze kansen en krijgen we de totale kans op deze situatie.

$$P(1) = \tfrac{8}{10} \cdot \left(1 - (\tfrac{2}{9})^2\right) \cdot \left(1 - (\tfrac{2}{8})^2\right) \cdots \left(1 - (\tfrac{2}{3})^2\right) = \frac{11}{54}$$

2: BBBBBBBOBO

$$P(2) = \tfrac{8}{10} \cdot \left(1 - (\tfrac{2}{9})^2\right) \cdot \left(1 - (\tfrac{2}{8})^2\right) \cdots \left(1 - (\tfrac{2}{4})^2\right) \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{270}$$

③: BBBBBBOBBO

$$P(③) = \tfrac{8}{10} \cdot \left(1-(\tfrac{2}{9})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{2}{8})^2\right) \cdots \left(1-(\tfrac{2}{5})^2\right) \cdot \left(\tfrac{2}{4}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(1-(\tfrac{1}{2})^2\right) = \frac{11}{270}$$

④: BBBBBOBBBO

$$P(④) = \tfrac{8}{10} \cdot \left(1-(\tfrac{2}{9})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{2}{8})^2\right) \cdots \left(1-(\tfrac{2}{6})^2\right) \cdot \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(1-(\tfrac{1}{3})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{1}{2})^2\right) = \frac{11}{315}$$

⑤: BBBBOBBBBO

$$P(⑤) = \tfrac{8}{10} \cdot \left(1-(\tfrac{2}{9})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{2}{8})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{2}{7})^2\right) \cdot \left(\tfrac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(1-(\tfrac{1}{4})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{1}{3})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{1}{2})^2\right) = \frac{11}{378}$$

⑥: BBBOBBBBBO

$$P(⑥) = \tfrac{8}{10} \cdot \left(1-(\tfrac{2}{9})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{2}{8})^2\right) \cdot \left(\tfrac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(1-(\tfrac{1}{5})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{1}{4})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{1}{3})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{1}{2})^2\right) = \frac{55}{2268}$$

⑦: BBOBBBBBBO

$$P(⑦) = \tfrac{8}{10} \cdot \left(1-(\tfrac{2}{9})^2\right) \left(\tfrac{2}{8}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{6}{7}\right)^2 \cdot \left(1-(\tfrac{1}{6})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{1}{5})^2\right) \cdots \left(1-(\tfrac{1}{2})^2\right) = \frac{11}{540}$$

⑧: BOBBBBBBBO

$$P(⑧) = \tfrac{8}{10} \cdot \left(\tfrac{2}{9}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{7}{8}\right)^2 \cdot \left(1-(\tfrac{1}{7})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{1}{6})^2\right) \cdots \left(1-(\tfrac{1}{2})^2\right) = \frac{7}{405}$$

⑨: OBBBBBBBBO

$$P(⑨) = \tfrac{2}{10} \cdot \left(\tfrac{8}{9}\right)^2 \cdot \left(1-(\tfrac{1}{8})^2\right) \cdot \left(1-(\tfrac{1}{7})^2\right) \cdots \left(1-(\tfrac{1}{2})^2\right) = \frac{4}{45}$$

De totale kans dat Wiske op de tiende dag een oranje paar kousen draagt (O_{10}), is de som van de kansen op alle negen scenario's die hierboven werden berekend.

$$P(O_{10}) = P(①) + P(②) + \ldots + P(⑨) = \frac{1}{2}$$

Besluit:
De kans dat Wiske op de laatste dag een paar oranje kousen draagt is 50%.