Opdracht 3: De volhardende voetbalfan

Philippe Cara

π-dag 2018

VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

WISKUNNEND WISKE WEDSTRIJD

De volhardende voetbalfan

Leo en Lambik willen de 16 voetbalstadions van onze eerste klasse bezoeken. Leo wil dat doen via een optimale rondrit vertrekkende uit Brugge.

De volhardende voetbalfan

Leo en Lambik willen de 16 voetbalstadions van onze eerste klasse bezoeken. Leo wil dat doen via een optimale rondrit vertrekkende uit Brugge.

Gegeven is de tabel van de afstanden tussen alle voetbalsteden en een algoritme.

De tabel

	Anderlecht	Antwerpen	Beveren	Brugge	Charleroi	Eupen	Genk	Gent	Kortrijk	Lokeren	Luik	Mechelen	Moeskroen	Oostende	Sint-Truiden	Waregem
Anderlecht	0	40	38	78	43	112	78	43	64	44	84	24	67	93	57	55
Antwerpen	40	0	11	76	81	117	73	47	83	28	94	19	88	93	64	71
Beveren	38	11	0	65	81	127	83	36	73	19	102	23	79	81	72	61
Brugge	78	76	65	0	112	188	146	37	40	51	161	83	47	17	130	38
Charleroi	43	81	81	112	0	104	87	79	84	74	76	61	84	124	63	81
Eupen	112	117	127	188	104	0	47	151	175	137	28	106	179	204	56	167
Genk	78	73	83	146	87	47	0	111	140	96	33	65	145	162	24	130
Gent	43	47	36	37	79	151	111	0	37	18	125	48	48	51	96	26
Kortrijk	64	83	73	40	84	175	140	37	0	54	147	79	8	44	120	12
Lokeren	44	28	19	51	74	137	96	18	54	0	111	31	60	67	80	42
Luik	84	94	102	161	76	28	33	125	147	111	0	80	150	176	30	138
Mechelen	24	19	23	83	61	106	65	48	79	31	80	0	84	98	49	69
Moeskroen	67	88	79	47	84	179	145	48	8	60	150	84	0	49	124	18
Oostende	93	93	81	17	124	204	162	51	44	67	176	98	49	0	146	43
Sint-Truiden	57	64	72	130	63	56	24	96	120	80	30	49	124	146	0	111
Waregem	55	71	61	38	81	167	130	26	12	42	138	69	18	43	111	0

De steden


België
NOORDZEE
NEDERLAND
FRANKRIJK
DUITSLAND
LUXEMBURG
Oostende
Brugge
Gent
St-Niklaas
Antwerpen
Mechelen
BRUSSEL
Anderlecht
Leuven
Hasselt
Genk
Kortrijk
Mouscron
Roeselare
Tournai
Aalst
LUIK
Seraing
Verviers
Charleroi
Namen
Mons
La Louvière
WEST-VLAANDEREN
OOST-VLAANDEREN
ANTWERPEN
VLAAMS BRABANT
LIMBURG
BRABANT WALLON
HAINAUT
NAMEN
LUIK
LUXEMBURG
Lille
Maastricht
Aachen
Eindhoven
Düsseldorf
Mönchengladbach
Duisburg
Luxemburg
Hoofdstad
meer dan 200.000
meer dan 100.000
meer dan 50.000
andere hoofdstad
Hoofdstad van regio
0 km
15 km
30 km
500 m
200 m
100 m
0 m
Onder zeeniveau

Het algoritme

1. Bepaal een opspannende boom van minimaal gewicht;
2. Bepaal de steden in deze opspannende boom met oneven graad;
3. Bepaal een perfecte koppeling van minimaal gewicht;
4. Bepaal een optimale route die elke stad 1 keer bezoekt.

Opspannende boom

- Begin met $T = \{\text{Brugge}\}$.

Opspannende boom

- Begin met $T = \{\text{Brugge}\}$.
- Zoek in de tabel de stad die het dichtst bij Brugge ligt

De tabel: Brugge

	Anderlecht	Antwerpen	Beveren	Brugge	Charleroi	Eupen	Genk	Gent	Kortrijk	Lokeren	Luik	Mechelen	Moeskroen	Oostende	Sint-Truiden	Waregem
Anderlecht	0	40	38	78	43	112	78	43	64	44	84	24	67	93	57	55
Antwerpen	40	0	11	76	81	117	73	47	83	28	94	19	88	93	64	71
Beveren	38	11	0	65	81	127	83	36	73	19	102	23	79	81	72	61
Brugge	78	76	65	0	112	188	146	37	40	51	161	83	47	17	130	38
Charleroi	43	81	81	112	0	104	87	79	84	74	76	61	84	124	63	81
Eupen	112	117	127	188	104	0	47	151	175	137	28	106	179	204	56	167
Genk	78	73	83	146	87	47	0	111	140	96	33	65	145	162	24	130
Gent	43	47	36	37	79	151	111	0	37	18	125	48	48	51	96	26
Kortrijk	64	83	73	40	84	175	140	37	0	54	147	79	8	44	120	12
Lokeren	44	28	19	51	74	137	96	18	54	0	111	31	60	67	80	42
Luik	84	94	102	161	76	28	33	125	147	111	0	80	150	176	30	138
Mechelen	24	19	23	83	61	106	65	48	79	31	80	0	84	98	49	69
Moeskroen	67	88	79	47	84	179	145	48	8	60	150	84	0	49	124	18
Oostende	93	93	81	17	124	204	162	51	44	67	176	98	49	0	146	43
Sint-Truiden	57	64	72	130	63	56	24	96	120	80	30	49	124	146	0	111
Waregem	55	71	61	38	81	167	130	26	12	42	138	69	18	43	111	0

Opspannende boom

- Begin met $T = \{\text{Brugge}\}$.
- Zoek in de tabel de stad die het dichtst bij Brugge ligt: Oostende.

Opspannende boom

- Begin met $T = \{\text{Brugge}\}$.
- Zoek in de tabel de stad die het dichtst bij Brugge ligt: Oostende. We stellen $T = \{\text{Brugge, Oostende}\}$ en hebben een boog van 17 km.

Opspannende boom

- Begin met $T = \{\text{Brugge}\}$.
- Zoek in de tabel de stad die het dichtst bij Brugge ligt: Oostende. We stellen $T = \{\text{Brugge, Oostende}\}$ en hebben een boog van 17 km.
- Zoek in de tabel de steden die respectievelijk het dichtst bij Oostende en bij Brugge liggen.

De tabel: Brugge, Oostende

	Anderlecht	Antwerpen	Beveren	Brugge	Charleroi	Eupen	Genk	Gent	Kortrijk	Lokeren	Luik	Mechelen	Moeskroen	Oostende	Sint-Truiden	Waregem
Anderlecht	0	40	38	78	43	112	78	43	64	44	84	24	67	93	57	55
Antwerpen	40	0	11	76	81	117	73	47	83	28	94	19	88	93	64	71
Beveren	38	11	0	65	81	127	83	36	73	19	102	23	79	81	72	61
Brugge	78	76	65	0	112	188	146	37	40	51	161	83	47	17	130	38
Charleroi	43	81	81	112	0	104	87	79	84	74	76	61	84	124	63	81
Eupen	112	117	127	188	104	0	47	151	175	137	28	106	179	204	56	167
Genk	78	73	83	146	87	47	0	111	140	96	33	65	145	162	24	130
Gent	43	47	36	37	79	151	111	0	37	18	125	48	48	51	96	26
Kortrijk	64	83	73	40	84	175	140	37	0	54	147	79	8	44	120	12
Lokeren	44	28	19	51	74	137	96	18	54	0	111	31	60	67	80	42
Luik	84	94	102	161	76	28	33	125	147	111	0	80	150	176	30	138
Mechelen	24	19	23	83	61	106	65	48	79	31	80	0	84	98	49	69
Moeskroen	67	88	79	47	84	179	145	48	8	60	150	84	0	49	124	18
Oostende	93	93	81	17	124	204	162	51	44	67	176	98	49	0	146	43
Sint-Truiden	57	64	72	130	63	56	24	96	120	80	30	49	124	146	0	111
Waregem	55	71	61	38	81	167	130	26	12	42	138	69	18	43	111	0

De tabel: Brugge, Oostende

	Anderlecht	Antwerpen	Beveren	Brugge	Charleroi	Eupen	Genk	Gent	Kortrijk	Lokeren	Luik	Mechelen	Moeskroen	Oostende	Sint-Truiden	Waregem
Anderlecht	0	40	38	78	43	112	78	43	64	44	84	24	67	93	57	55
Antwerpen	40	0	11	76	81	117	73	47	83	28	94	19	88	93	64	71
Beveren	38	11	0	65	81	127	83	36	73	19	102	23	79	81	72	61
Brugge	78	76	65	0	112	188	146	37	40	51	161	83	47	17	130	38
Charleroi	43	81	81	112	0	104	87	79	84	74	76	61	84	124	63	81
Eupen	112	117	127	188	104	0	47	151	175	137	28	106	179	204	56	167
Genk	78	73	83	146	87	47	0	111	140	96	33	65	145	162	24	130
Gent	43	47	36	37	79	151	111	0	37	18	125	48	48	51	96	26
Kortrijk	64	83	73	40	84	175	140	37	0	54	147	79	8	44	120	12
Lokeren	44	28	19	51	74	137	96	18	54	0	111	31	60	67	80	42
Luik	84	94	102	161	76	28	33	125	147	111	0	80	150	176	30	138
Mechelen	24	19	23	83	61	106	65	48	79	31	80	0	84	98	49	69
Moeskroen	67	88	79	47	84	179	145	48	8	60	150	84	0	49	124	18
Oostende	93	93	81	17	124	204	162	51	44	67	176	98	49	0	146	43
Sint-Truiden	57	64	72	130	63	56	24	96	120	80	30	49	124	146	0	111
Waregem	55	71	61	38	81	167	130	26	12	42	138	69	18	43	111	0

Opspannende boom

- Begin met $T = \{\text{Brugge}\}$.
- Zoek in de tabel de stad die het dichtst bij Brugge ligt: Oostende. We stellen $T = \{\text{Brugge, Oostende}\}$ en hebben een boog van 17 km.
- Zoek in de tabel de steden die respectievelijk het dichtst bij Oostende en bij Brugge liggen. Dit zijn Gent, op 37 km van Brugge en Waregem, op 43 km van Oostende. We voegen dus Gent toe: $T = \{\text{Brugge, Oostende, Gent}\}$, met een boog van 37 km tussen Brugge en Gent.
- We blijven op die manier T uitbreiden en zo kort mogelijke bogen toevoegen tot alle steden in T zitten.

De opspannende boom B met $\ell(B) = 365$

Het algoritme

1. Bepaal een opspannende boom van minimaal gewicht $\ell(B) = 365$;
2. Bepaal de steden in deze opspannende boom met oneven graad;
3. Bepaal een perfecte koppeling van minimaal gewicht;
4. Bepaal een optimale route die elke stad 1 keer bezoekt.

De toppen van oneven graad

Het algoritme

1. Bepaal een opspannende boom van minimaal gewicht $\ell(B) = 365$;
2. Bepaal de steden in deze opspannende boom met oneven graad: Oostende, Moeskroen, Gent, Mechelen, Charleroi, Sint-Truiden, Genk en Eupen;
3. Bepaal een perfecte koppeling van minimaal gewicht voor de steden met oneven graad;
4. Bepaal een optimale route die elke stad 1 keer bezoekt.

De kortste perfecte koppeling

Het algoritme

1. Bepaal een opspannende boom van minimaal gewicht $\ell(B) = 365$;
2. Bepaal de steden in deze opspannende boom met oneven graad: Oostende, Moeskroen, Gent, Mechelen, Charleroi, Sint-Truiden, Genk en Eupen;;
3. Bepaal een perfecte koppeling van minimaal gewicht $\ell(K) = 207$;
4. Bepaal een optimale route die elke stad 1 keer bezoekt.

Het algoritme

1. Bepaal een opspannende boom van minimaal gewicht $\ell(B) = 365$;
2. Bepaal de steden in deze opspannende boom met oneven graad: Oostende, Moeskroen, Gent, Mechelen, Charleroi, Sint-Truiden, Genk en Eupen;;
3. Bepaal een perfecte koppeling van minimaal gewicht $\ell(K) = 207$;
4. Bepaal een optimale route die elke stad 1 keer bezoekt.

Een graaf waarin elke top even graad heeft, heeft een rondgang die elke boog juist 1 keer gebruikt. [Eulercircuit]

De kortste perfecte koppeling

Leo's tocht


België
NOORDZEE
NEDERLAND
Westerschelde
Eindhoven
Duisburg
Düsseldorf
Mönchengladbach
Aachen
DUITSLAND
FRANKRIJK
LUXEMBURG
Luxemburg
Maastricht
Oostende
Brugge
Gent
St-Niklaas
Antwerpen
ANTWERPEN
Mechelen
Leuven
BRUSSEL
Anderlecht
VLAAMS BRABANT
WEST-VLAANDEREN
OOST-VLAANDEREN
Roeselare
Kortrijk
Mouscron
Lille
Tournai
Aalst
Hasselt
Genk
LIMBURG
Tongeren
Luik
Seraing
Verviers
LUIK
BRABANT WALLON
HAINAUT
La Louvière
Mons
Charleroi
Namen
NAMEN
LUXEMBURG
0 km
15 km
30 km
Hoofdstad
meer dan 200.000
meer dan 100.000
meer dan 50.000
andere hoofdstad
Hoofdstad van regio
500 m
200 m
100 m
0 m
Onder zeeniveau

Leo's tocht


België
NOORDZEE
NEDERLAND
FRANKRIJK
DUITSLAND
LUXEMBURG
Oostende
Brugge
Antwerpen
Mechelen
BRUSSEL
Leuven
Hasselt
Genk
Maastricht
Aachen
Eindhoven
Kortrijk
Mouscron
Lille
Tournai
Mons
Charleroi
Namen
Luik
Seraing
Verviers
Aalst
St-Niklaas
Anderlecht
WEST-VLAANDEREN
OOST-VLAANDEREN
VLAAMS BRABANT
ANTWERPEN
LIMBURG
BRABANT WALLON
HAINAUT
NAMEN
LUIK
LUXEMBURG
Roeselare
Luxemburg
Duisburg
Düsseldorf
Mönchengladbach
Hoofdstad
meer dan 200.000
meer dan 100.000
meer dan 50.000
andere hoofdstad
Hoofdstad van regio
0 km
15 km
30 km
500 m
200 m
100 m
0 m
Onder zeeniveau

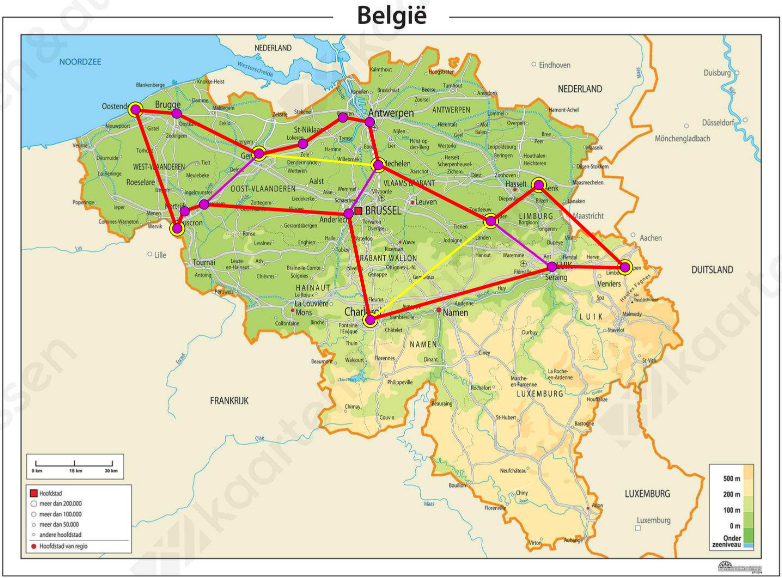
Leo's tocht


België
NOORDZEE
NEDERLAND
FRANKRIJK
DUITSLAND
LUXEMBURG
Oostende
Brugge
Antwerpen
BRUSSEL
Leuven
Mechelen
Hasselt
Namen
Charleroi
Seraing
Verviers
Kortrijk
Roeselare
Aalst
Tournai
Mons
WEST-VLAANDEREN
OOST-VLAANDEREN
ANTWERPEN
VLAAMS BRABANT
LIMBURG
BRABANT WALLON
HAINAUT
NAMEN
LUIK
LUXEMBURG
Lille
Aachen
Maastricht
Eindhoven
Düsseldorf
Mönchengladbach
Duisburg
Luxemburg
Hoofdstad
meer dan 200.000
meer dan 100.000
meer dan 50.000
andere hoofdstad
Hoofdstad van regio
0 km
15 km
30 km
500 m
200 m
100 m
0 m
Onder zeeniveau

Leo's tocht


België
NOORDZEE
NEDERLAND
Oostende
Brugge
Antwerpen
Mechelen
BRUSSEL
Leuven
Hasselt
Genk
Kortrijk
Mouscron
Lille
Tournai
Mons
Charleroi
Namen
Seraing
Verviers
Eupen
Aachen
DUITSLAND
FRANKRIJK
LUXEMBURG
Luxemburg
WEST-VLAANDEREN
OOST-VLAANDEREN
VLAAMS BRABANT
BRABANT WALLON
HAINAUT
NAMEN
LUIK
LIMBURG
LUXEMBURG
Maastricht
Eindhoven
Düsseldorf
Mönchengladbach
Duisburg
Hoofdstad
meer dan 200.000
meer dan 100.000
meer dan 50.000
andere hoofdstad
Hoofdstad van regio
500 m
200 m
100 m
0 m
Onder zeeniveau

Leo’s tocht

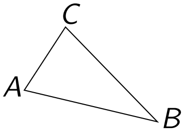


VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL

WISKUNNEND WISKE WEDSTRIJD

Optimaal?

- We vinden uiteindelijk een circuit C waarbij Leo $\ell(C) = 512$ kilometer aflegt.
- Het algoritme dat we hier hebben gebruikt werd in 1976 bedacht Nicos Christofides.
- Het is tot nu toe de beste benadering van een optimale tocht (behalve voor zeer speciale gevallen). De afgelegde weg is gegarandeerd niet meer dan 3/2 keer de afgelegde weg in het kortst mogelijke circuit.
- Dit algoritme werkt op grafen die voldoen aan de driehoeksongelijkheid: $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$.



Bewijs

- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.

Bewijs

- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.

Het algoritme dat we hebben gebruikt om een opspannende boom te vinden geeft werkelijk een samenhangende deelgraaf B met $\ell(B)$ minimaal. [gierigheidsalgoritme]

Bewijs

- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.
- Er geldt dus $\ell(B) \leqslant \ell(H)$.

Bewijs

- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.
- Er geldt dus $\ell(B) \leqslant \ell(H)$.
- Construeer nu een deelcircuit D dat enkel de steden met oneven graad in B bezoekt door deze met elkaar te verbinden in de volgorde waarin ze voorkomen in H. Dit is een circuit met een even aantal toppen.

Bewijs

- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.

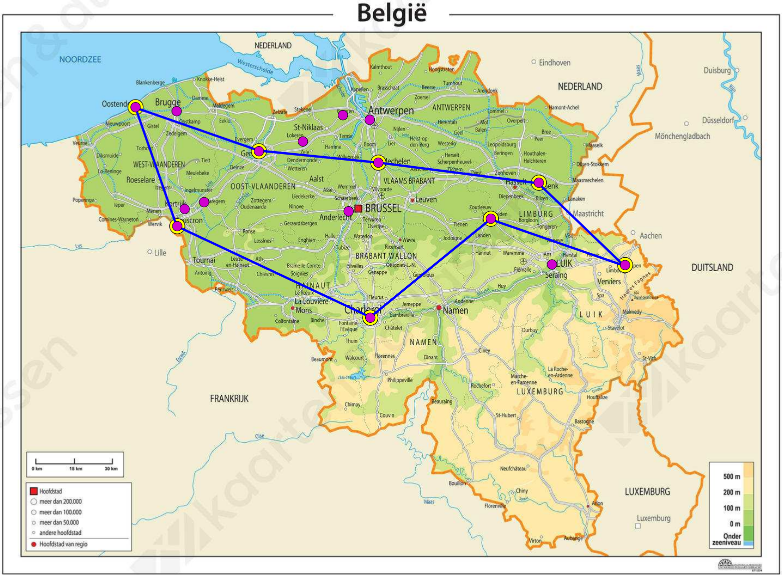
- Er geldt dus $\ell(B) \leqslant \ell(H)$.
- Construeer nu een deelcircuit D dat enkel de steden met oneven graad in B bezoekt door deze met elkaar te verbinden in de volgorde waarin ze voorkomen in H. Dit is een circuit met een even aantal toppen.

In een graaf is het aantal toppen met oneven graad altijd even.

Bewijs

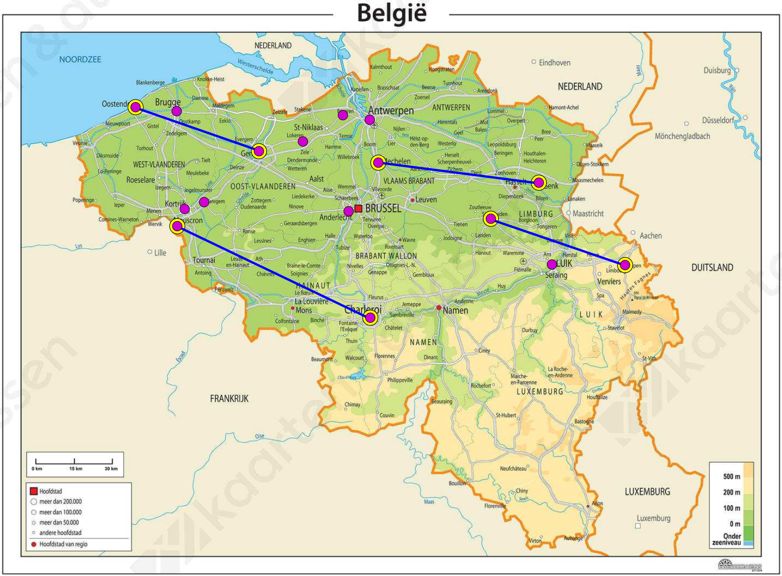
- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.
- Er geldt dus $\ell(B) \leqslant \ell(H)$.
- Construeer nu een deelcircuit D dat enkel de steden met oneven graad in B bezoekt door deze met elkaar te verbinden in de volgorde waarin ze voorkomen in H. Dit is een circuit met een even aantal toppen.
- Door in het circuit D een boog op twee te nemen, verkrijgen we een perfecte koppeling D_1. Door de andere bogen te nemen krijgen we een andere koppeling D_2.

Een even circuit geeft twee perfecte koppelingen



Een even circuit geeft twee perfecte koppelingen

Een even circuit geeft twee perfecte koppelingen



Bewijs

- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.
- Er geldt dus $\ell(B) \leqslant \ell(H)$.
- Construeer nu een deelcircuit D dat enkel de steden met oneven graad bezoekt door deze met elkaar te verbinden in de volgorde waarin ze voorkomen in H. Dit is een circuit met een even aantal toppen.
- Door in het circuit D een boog op twee te nemen, verkrijgen we een perfecte koppeling D_1. Door de andere bogen te nemen krijgen we een andere koppeling D_2.
- Voor D geldt dat $\ell(D) = \ell(D_1) + \ell(D_2) \leqslant \ell(H)$ zodat voor de lichtste van deze twee koppelingen zeker geldt $\ell(D_1) \leqslant \frac{1}{2}\ell(H)$.

Bewijs

- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.
- Er geldt dus $\ell(B) \leqslant \ell(H)$.
- Voor de lichtste van deze twee koppelingen zeker geldt $\ell(D_1) \leqslant \frac{1}{2}\ell(H)$.

Bewijs

- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.
- Er geldt dus $\ell(B) \leqslant \ell(H)$.
- Voor de lichtste van deze twee koppelingen zeker geldt $\ell(D_1) \leqslant \frac{1}{2}\ell(H)$.
- De perfecte koppeling K die wij hebben geconstrueerd is de kortst mogelijke tussen toppen van oneven graad. Dus geldt $\ell(K) \leqslant \ell(D_1)$.

Bewijs

- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.
- Er geldt dus $\ell(B) \leqslant \ell(H)$.
- Voor de lichtste van deze twee koppelingen zeker geldt $\ell(D_1) \leqslant \frac{1}{2}\ell(H)$.
- De perfecte koppeling K die wij hebben geconstrueerd is de kortst mogelijke tussen toppen van oneven graad. Dus geldt $\ell(K) \leqslant \ell(D_1)$.
- We hebben door de driehoeksongelijkheid dat de alternatieve wegen die we namen om te vermijden dat we eenzelfde stad meer dan eens bezochten korter zijn dan de wegen in $B \cup K$.

Bewijs

- Onderstel dat H een optimale rondgang is. Dus $\ell(H)$ minimaal.
- Er geldt dus $\ell(B) \leqslant \ell(H)$.
- Voor de lichtste van deze twee koppelingen zeker geldt $\ell(D_1) \leqslant \frac{1}{2}\ell(H)$.
- De perfecte koppeling K die wij hebben geconstrueerd is de kortst mogelijke tussen toppen van oneven graad. Dus geldt $\ell(K) \leqslant \ell(D_1)$.
- We hebben door de driehoeksongelijkheid dat de alternatieve wegen die we namen om te vermijden dat we eenzelfde stad meer dan eens bezochten korter zijn dan de wegen in $B \cup K$.
- Bijgevolg geldt dat $\ell(C) \leqslant \ell(B) + \ell(K) \leqslant \ell(H) + \frac{1}{2}\ell(H) = \frac{3}{2}\ell(H)$.

Kan Leo beter doen?

We kunnen zeggen dat er voor Leo misschien een kortere tocht langs alle eersteklasse voetbalstadions bestaat maar op zijn minst zal hij

$$512 \times \frac{2}{3} = 341,3333\ldots$$

kilometer moeten afleggen, dankzij de Stelling van Christofides.