Wiskunnend Wiske 2012-2013
Oplossing opdracht 2
Klein Seminarie Roeselare
Klas: 6 WWIA (wetenschappen-wiskunde)

Suske moet op zoek gaan naar de coëfficiënten a_i met $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, $a_i \in \mathbb{N}$ van de veelterm

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Hij kan de getallen a_i met $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ vinden door **2 goedgekozen getallen** in te vullen.

- Suske vraagt eerst de **getalwaarde van 1**.

  Wanneer Wiske 1 invult in de veelterm P, berekent ze eigenlijk de som van alle coëfficiënten a_i met $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$:

  $$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

  Omdat alle coëfficiënten a_i met $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ positieve (natuurlijke) getallen zijn, weet Suske nu dat de grootste coëfficiënt (en bijgevolg alle coëfficiënten) kleiner of gelijk aan $P(1)$ zijn.

  Suske moet nu het aantal cijfers tellen van het getal $P(1)$, we noemen dit getal j. Ook iedere a_i bestaat bijgevolg hoogstens uit j cijfers.

  Bijgevolg weet Suske ook dat $a_i < 10^j$ met $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$.

  Vb: Wanneer $P(1) = 2354$ dan is $j = 4$ en zijn alle coëfficiënten van de veelterm kleiner dan 10000.

- Suske vraagt nu tenslotte de **getalwaarde van** 10^j.

$$P(10^j) = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^j = a_0 + a_1.10^j + a_2.10^{2j} + \ldots + a_n.10^{nj}$$

Omdat de constante term $a_0 < 10^j$ en alle andere termen uit $P(10^j)$ een veelvoud zijn van 10^j, vormen de laatste j cijfers het getal a_0.

Wanneer we nu het getal $\dfrac{P(10^j) - a_0}{10^j} = a_1 + a_2 10^j + \ldots + a_n 10^{(n-1)j}$ berekenen, verkrijgen we het getal $P(10^j)$ zonder de laatste j cijfers.

We kunnen nu bovenstaande argumentatie herhalen. De laatste j cijfers van dit nieuwe getal, wat dezelfde zijn als het blokje van j cijfers voor a_0 in $P(10^j)$, vormen het getal a_1.

We kunnen dit blijven herhalen en zien op deze manier dat alle coëfficiënten a_i met $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ na elkaar terug te vinden zijn in het getal $P(10^j)$ door het getal te splitsen in blokjes van lengte j (voeg eventueel vooraan nullen toe zodat het aantal cijfers van $P(10^j)$ een veelvoud wordt van j), te starten achteraan.

j cijfers	j cijfers	....	j cijfers	j cijfers	j cijfers
a_n	a_{n-1}		a_2	a_1	a_0

- Laat ons een voorbeeld uitwerken:

Stel dat de veelterm van Wiske gelijk is aan $P(x) = 24x^4 + 512x^2 + 103x + 25$

Suske vraagt $P(1)$ en Wiske antwoordt: 664.

Omdat 664 uit 3 cijfers bestaat, vraagt Suske nu $P(10^3)$ en Wiske antwoordt: 24000512103025.

Suske voegt één 0 vooraan toe en splitst zijn getal in blokjes van 3 cijfers 024|000|512|103|025

Suske kent nu de volledige veelterm $P(x)$, namelijk $P(x) = 24x^4 + 512x^2 + 103x + 25$.

- Waarom kan Suske nooit de veelterm vinden, als hij slechts 1 getal laat invullen door Wiske?
  - Bovenstaande strategie kan onmogelijk werken, daar Suske moet weten welke macht van 10 hij als tweede getal laat invullen. Als hij willekeurig een waarde kiest , zeg 10^k , dan loopt zijn methode mank als er minstens één coëfficiënt uit meer dan k cijfers bestaat.

  - Wanneer we veronderstellen dat het getal dat Suske laat invullen een rationaal getal is, kunnen we met volgende redenering aantonen dat er minstens 2 veeltermen met natuurlijke coëfficiënten bestaan die dezelfde getalwaarde hebben voor het door Suske gekozen getal. Het wordt dus onmogelijk om de juiste veelterm te bepalen.

    Stel dat Suske zijn getal gelijk is aan $a \in \mathbb{Q}$. We kunnen bijgevolg a schijven als $a = \frac{z}{n}$ met $z \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}$.

    - Kies nu de veelterm $P_1(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ zodat elke $b_i \in \mathbb{N}$ deelbaar is door z^2.

      Wanneer we nu a invullen, vinden we $P_1(a) = P_1\left(\frac{z}{n}\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\frac{z}{n}\right)^i$

    - We definiëren nu een tweede veelterm $P_2(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{n^2 b_i}{z^2} x^{i+2}$.

      Wanneer we nu $a = \frac{z}{n}$ invullen, vinden we

      $$P_2\left(\frac{z}{n}\right) = \sum_{i=0}^{m} \frac{n^2 b_i}{z^2} \left(\frac{z}{n}\right)^{i+2} = \sum_{i=0}^{m} \frac{n^2 b_i}{z^2} \left(\frac{z}{n}\right)^{i} \left(\frac{z}{n}\right)^{2} = \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\frac{z}{n}\right)^{i} = P_1\left(\frac{z}{n}\right).$$

    - Beide veeltermen hebben dus dezelfde getalwaarde voor a. Bijgevolg is het onmogelijk om door 1 rationaal getal in te vullen elke veelterm met natuurlijke coëfficiënten te kunnen bepalen.