

**Opdracht 1**  
**Heilige-Maagdcollege Dendermonde**  
**Kerkstraat 60, 9200 Dendermonde**  
**6 WW B**

A) Na hoeveel biedingen dient Sidonia te beslissen om te verkopen opdat de kans dat er nog precies 1 hoger bod volgt maximaal is?

We definiëren een succes als een bod dat hoger is dan alle vorige.

Met andere woorden, na bod  $x$  (als bod  $x$  de laatste bieding is waarop Sidonia niet mag verkopen) mag er slechts 1 bod zijn dat een succes is. Dus hebben we 3 voorwaarden: er moet een bod zijn dat een succes is (dat we gemakshalve bod  $h$  zullen noemen), de boden voor dat bod  $h$  en na bod  $x$  mogen geen succes zijn, en de biedingen na dat bod  $h$  mogen ook geen succes zijn.

De kans dat bod  $h$  een succes is, is  $1/h$ . ( $h$  een natuurlijk getal) (1)

De kans dat de biedingen na  $h$  geen succes is, is gelijk aan:  
 $h/h+1 * h+1/h+2 * \dots * 19/20$  ( $h$  een natuurlijk getal) (2)

Logischerwijs kunnen we dan die elementen schrappen, zodat we  $h/20$  bekomen.

(we kunnen ook deze 2 voorwaarden bijengaren, door te zeggen dat de kans dat dit bod het hoogste bod is,  $1/20$  is, en dus ook de biedingen na bod  $h$  geen succes zijn.)

De biedingen voor bod  $h$  en na bod  $x$  mogen geen succes zijn.

Hier moeten we rekening houden met het feit dat elk bod na  $x$  een succes kan zijn.

Dan bekomen we de kans:

$1$  (als  $x+1$  bod  $h$  is) + (of)  $x/x+1$  (als  $x+2$  bod  $h$  is, want dan mag  $x+1$  geen succes zijn) +  
 $x/x+1 * x+1/x+2$  (als  $x+3$  bod  $h$  is) ..... +  $x/19$  (als  $20$  bod  $h$  is) (3)

Uit (1),(2) en (3) volgt dat de kans dat er juist 1 bod een succes is na bod  $x$  gelijk is aan:

$P(x) = 1/20 * (x/x + x/x+1 + x/x+2 + \dots + x/19)$  ( $0 < x < 20$ ,  $x$  een natuurlijk getal)

want dan heeft het bod aan alle voorwaarden voldaan.

Van deze vergelijking moeten we het maximum zien te vinden.

$P(x) = 1/20 * (x/x + x/x+1 + \dots + x/19)$  ( $0 < x < 20$ ,  $x$  een natuurlijk getal)

$P(x-1) = 1/20 * (x-1/x-1 + x-1/x + x-1/x+1 + \dots + x-1/19)$

⇔

$P(x-1) = 1/20 * [ (x/x + x/x+1 + \dots + x/19) + (x-1/x-1 - 1/x - 1/x+1 - \dots - 1/19) ]$

⇔

$P(x-1) = P(x) + (1/20) * (1 - 1/x - 1/x+1 - \dots - 1/19)$

Dit wil zeggen dat de kans zal dalen als  $1 - 1/x - 1/x+1 - \dots - 1/19 < 0$

Ofwel de kans zal dalen als:

$1/x + 1/x+1 + \dots + 1/19 > 1$

OF

$$\sum_{k=x}^{19} 1/k > 1$$

Dit betekent dat de hoogste  $x$  waarvoor dit geldt het bod zal zijn dat ons de maximale kans geeft. Dat levert ons  $x=7$  op.

B) Wat is de maximale kans op succes?

De strategie die we hier gebruikten is gebaseerd op wat we bij a vonden. Als de kans dat juist 1 bod hoger is na bod 7 maximaal is, dan wilt dat zeggen dat dat bod ook het hoogste zal zijn van alle biedingen, en dat de kans dat dat bod bestaat en enig is, maximaal is. Met deze strategie lossen we vraag b op.

Aangezien de kans van vraag a de enige factor is waarvan het succes afhankelijk is, kunnen we die kans dan ook gebruiken. Dus voor deze vraag hoefden we slechts de kans voor  $x=7$  in te vullen

$$P(7) = 1/20 * (1 + 7/8 + 7/9 + \dots + 7/19) \\ \approx 0,3842$$

Dus de maximale kans op succes is 38,42 % kans.

C) Bedenk nu een strategie om het beste bod te kunnen aanvaarden als er maximaal  $n$  mogelijke kopers (i.p.v. 20), voor een natuurlijk getal  $n$

We volgen de redenering analoog aan vraag a.

De kans dat het bod een succes is, en hoger is dan alle volgende boden, is  $1/n$

De kans dat de boden voor bod  $h$  geen succes zijn, is gelijk aan

$$1 \text{ (als } x+1 \text{ bod } h \text{ is)} + x/x+1 \text{ (als } x+2 \text{ bod } h \text{ is)} + \dots + x/n-1 \text{ (als } n \text{ bod } h \text{ is)}$$

dus komen we op een kans:

$$P_n(x) = (1/n) * (x/x + x/x+1 + x/x+2 + \dots + x/n-1) \text{ (voor } x \text{ en } n \text{ een natuurlijk getal)}$$

dan zoeken we het maximum (voor natuurlijke getallen) weer, analoog aan de redenering bij vraag a

$$P_n(x-1) = P_n(x) - (1/n) * (1 - 1/x - 1/x+1 - \dots - 1/n-1)$$

$$\text{Dus de kans zal weer dalen als } \sum_{k=x}^{19} 1/k > 1$$

Dus we nemen weer het hoogste bod  $x$  waarvoor dit geldt, want dat zal dan het meeste kans hebben. (1)

We laten dan de eerste  $x$  biedingen passeren, ( waarvoor  $x$  geldt aan (1) ), en nemen het eerstvolgende bod dat hoger is dan alle vorige aan, omdat de kans dat er slechts 1 bod dat hoger is dan alle vorige maximaal is.