Wiskunnend Wiske
Opdracht 2

Atheneum Willebroek
Eduard Anseelestraat z/n
2830 Willebroek

6EC-WI, 6LA-WI, 6WE-WI

Wiskunnend wiske:

Opgave 2: De seriële schoenen

Sidonia heeft al haar schoenen uit de kast gehaald om een beetje orde te scheppen. In haar woonkamer staan nu 30 schoenen in willekeurige volgorde op een rij, 15 linker- en 15 rechterschoenen.
Is het waar dat, ongeacht hoe de schoenen staan, er in deze rij altijd 10 opeenvolgende schoenen kunnen worden gevonden, zodat deze evenveel linker- als rechterschoenen bevatten?

Oplossing:

Er staan 30 schoenen (15 linker- en 15 rechterschoenen) op een rij naast elkaar in een willekeurige volgorde:

voorbeeld:

R	R	L	R	L	R	R	L	L	R	R	L	L	L	L	R	R	R	L	L	L	R	R	R	R	L	L	L	R	L

We stellen de schoenen voor met behulp van een "lading":

lading linkerschoen = -1 (symbool -)

lading rechterschoen = +1 (symbool +)

voorbeeld:

+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	+	-

Mogelijke waarden van de totale "lading" in een subset van 10 opeenvolgende schoenen:

-10 (10 linkerschoenen)

-8 (9 linkerschoenen en 1 rechterschoen)

-6 (8 linkerschoenen en 2 rechterschoenen)

...

6 (2 linkerschoenen en 8 rechterschoenen)

8 (1 linkerschoen en 9 rechterschoenen)

10 (10 rechterschoenen)

De totale "lading" in een subset van 10 opeenvolgende schoenen is "het aantal rechterschoenen" min "het aantal linkerschoenen".

Is de totale "lading" nul, dan is het aantal rechter- en linkerschoenen even groot.

Is de totale "lading" positief, dan is het aantal rechterschoenen groter dan het aantal linkerschoenen.

Is de totale "lading" negatief, dan is het aantal rechterschoenen kleiner dan het aantal linkerschoenen.

Bewijs uit het ongerijmde:

We stellen dat een subset van 10 opeenvolgende schoenen met evenveel linker- als rechterschoenen nooit voorkomt. Dus we stellen dat de totale "lading" van een subset van 10 opeenvolgende schoenen nooit 0 kan zijn.

We gaan van een subset van 10 opeenvolgende schoenen over naar de volgende subset van 10 opeenvolgende schoenen door de eerste schoen van de eerste subset te schrappen en de laatste schoen van de tweede subset erbij te voegen.

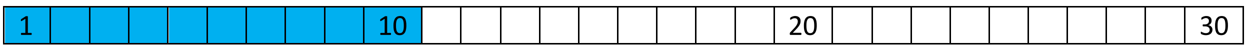
Alle mogelijke veranderingen van totale "lading" tussen 2 opeenvolgende subsets wordt gegeven in volgende tabel:

Geschrapte lading	**Toegevoegde lading**	**Netto verandering v/d lading**
-1	**-1**	**0**
+1	**+1**	**0**
-1	**+1**	**+2**
+1	**-1**	**-2**

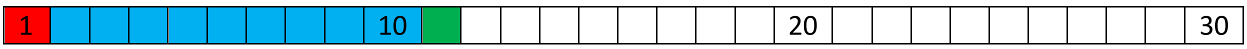
Stel dat het aantal linkerschoenen groter is dan het aantal rechterschoenen in de eerste subset van 10 opeenvolgende schoenen (in het andere geval is het bewijs volledig analoog). De lading van de eerste subset is dan ≤ -2.

De lading van de volgende subset kan maximaal 2 hoger zijn en is dus ≤ -2 +2 = 0, maar volgens onze onderstelling mag de lading van deze subset niet 0 bedragen. De lading van de volgende subset is dus ≤ -2.

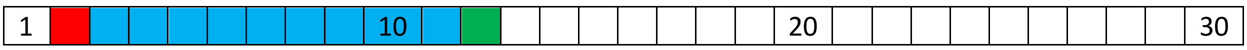
Door steeds dezelfde redenering te voeren mogen we besluiten dat in elke subset van 10 opeenvolgende schoenen de lading steeds ≤ -2.



Eerste subset van 10 schoenen: lading ≤ -2

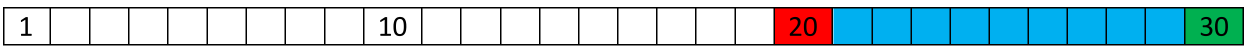


Tweede subset van 10 schoenen: lading ≤ -2



Derde subset van 10 schoenen: lading ≤ -2

…..

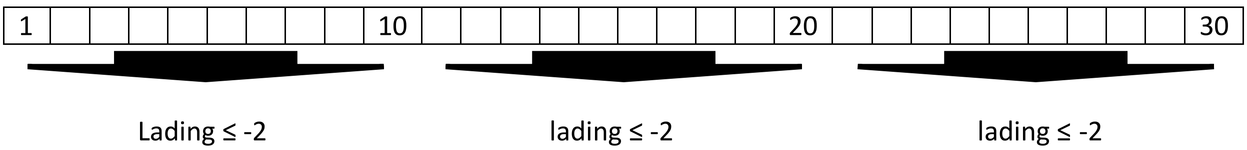


Laatste subset van 10 schoenen: lading ≤ -2

De subset van 10 schoenen van index 1 tot en met 10 heeft lading ≤ -2.

De subset van 10 schoenen van index 11 tot en met 20 heeft lading ≤ -2.

De subset van 10 schoenen van index 21 tot en met 30 heeft lading ≤ -2.



De maximale lading van alle schoenen samen bedraagt -6 (er bevinden zich immers altijd meer linker- dan rechterschoenen in de subsets).

Maar de totale lading van alle 30 schoenen ≡ 0, want er zijn evenveel linker- als rechterschoenen, dus er is een tegenstrijdigheid!

<u>Conclusie:</u>

De onderstelling die we gemaakt hebben is fout, er is dus steeds wel een subset van 10 schoenen terug te vinden met evenveel linker- als rechterschoenen.