Vrije Universiteit Brussel

Wiskunnend Wiske

1. In hoeveel stukken kan je een pizza maximaal verdelen als je respectievelijk $5, 6$ en 7 keer langs een rechte mag snijden?
2. Gegeven een maximaal aantal stukken als je $(n-1)$ keer gesneden hebt. Hoe snij je de n-de keer om opnieuw een maximaal aantal stukken te verkrijgen?
3. Hoeveel extra gebieden krijg je dan?
4. Geef een formule die het maximaal aantal gebieden geeft als je n keer mag snijden. Bewijs.

Oplossing

Methode 1

1.

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
Max Aantal stukken	2	4	7	11	16	22	29	$\cdots$
Aantal nieuwe stukken	2	2	3	4	5	6	7	$\cdots$

2. Als $n-1$ rechten optimaal snijden moet de n-de rechte alle andere snijden om opnieuw een maximaal aantal stukken te verkrijgen.
3. Zie tabel deel 1
4. De formule wordt dus

$$2+2+3+4+5+\cdots+n = 2+\sum_{i=2}^{n} i = 2+\frac{n(n+1)}{2}-1 = \frac{n^2+n+2}{2}$$

Methode 2

De formule blijkt

$$A(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$$

te zijn. We bewijzen dit per inductie:

- Voor $n=1$: $A(1) = \frac{1+1+2}{2} = 2$
- Voor $n=k$: $A(k) = \frac{k^2+k+2}{2}$

- Voor $n = k+1$: geldt $A(k+1) = \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} = \frac{k^2+3k+4}{2}$?

Als we langs de $k+1$-ste rechte snijden, snijdt deze in het algemeen alle vorige k rechten. Dit geeft k snijpunten. Deze snijpunten verdelen de laatste rechte in $k+1$ stukken, en elk van deze $k+1$ stukken doorsnijdt een vlakdeel, dus geeft een extra vlakdeel. Dus de $k+1$-ste rechte geeft $k+1$ extra vlakdelen. Dus:

$$A(k+1) = A(k) + (k+1).$$

Door onze inductiehypothese:

$$A(k+1) = \frac{k^2+k+2}{2} + (k+1) = \frac{k^2+3k+4}{2}.$$

Methode 3

Nemen we n rechten die elkaar optimaal snijden (ihb geen 3 rechten snijden elkaar in 1 punt, en elke 2 rechten snijden elkaar binnen de cirkel). We mogen zonder verlies van algemeenheid veronderstellen dat geen van deze n rechten horizontaal ligt (indien dit niet zo is kan je alle rechten draaien).
We maken nu een onderscheid tussen twee soorten stukken:

1. Stukken die beneden "begrensd" zijn door het snijpunt van twee rechten

2. Stukken die niet begrensd zijn door het snijpunt van twee rechten

Van het eerste type zijn er evenveel stukken als het aantal snijpunten. Inderdaad, je kan er nooit te weinig geteld hebben (ihb indien 2 stukken eenzelfde laagste punt zouden hebben) aangezien geen 3 rechten door 1 punt gaan. Van dit type hebben we dus $\frac{n(n-1)}{2}$ stukken.
Wat er overblijft zijn alle stukken van type 2. Aangezien geen enkele rechte horizontaal ligt, hebben we zo $n+1$ stukken. Minder kan niet aangezien geen enkele rechte horizontaal ligt. Meer kan ook niet want n rechten die elkaar niet (meer) snijden verdelen een vlak in juist $n+1$ stukken.