Wiskunnend Wiske 2015–16, finale opdracht 5

(oplossing, Ph. Cara, 23 april 2016)

1 Opgave

Het getal 1143137652768 is de vijfde macht van een natuurlijk getal. Wat is dit getal?

OPMERKING: Dit was een vraag tegen de tijd waar enkel het eindantwoord van belang was. Snel fout redeneren of gokken konden dus ook leiden tot een hoge score.

2 Oplossing

Om deze vraag snel op te lossen kan men eerst een benadering zoeken en die dan verfijnen aan de hand van een eigenschap.

EIGENSCHAP: Het laatste cijfer van de vijfde macht van een natuurlijk getal n is steeds hetzelfde als het laatste cijfer van n.

BEWIJS: Het laatste cijfer van een getal n is eigenlijk niets anders dan de rest bij deling door 10 van dat getal. Als we twee getallen n en m met elkaar vermenigvuldigen, is het laatste cijfer van het product gelijk aan het laatste cijfer van het product van de laatste cijfers van de getallen n en m. Formeel schrijven we $n = 10 \cdot q + r$ en $m = 10 \cdot s + t$, met r en t de respectievelijke resten van n en m bij deling door 10. Dan hebben n en m respectievelijk r en t als laatste cijfer en geldt duidelijk dat $nm = 100 \cdot qs + 10 \cdot (qt + rs) + rt$. Vermits de eerste twee termen van deze som deelbaar zijn door 10, zal de rest van nm bij deling door 10 inderdaad afkomstig zijn van het product rt van de laatste cijfers van n en m.

Als $n = 10 \cdot q + r$, is het laatste cijfer van n^5 dus gelijk aan het laatste cijfer van r^5. Omdat r een getal tussen 0 en 9 is, hoeven we nu alleen maar deze 10 cijfers te verheffen tot de vijfde macht en vast te stellen dat hun laatste cijfer inderdaad juist r is. We berekenen $0^5 = \underline{0}$, $1^5 = \underline{1}$, $2^5 = 3\underline{2}$, $3^5 = 24\underline{3}$, $4^5 = 102\underline{4}$, $5^5 = 312\underline{5}$, $6^5 = 777\underline{6}$, $7^5 = 1680\underline{7}$, $8^5 = 3276\underline{8}$ en tenslotte $9^5 = 5904\underline{9}$. Dit is allemaal snel uitgerekend als je de taken verdeelt binnen je ploeg. $\square$

Het getal 1143137652768 bestaat uit 13 cijfers en is dus groter dan 100^5 dat uit 11 cijfers bestaat. Het is ook groter dan $200^5 = 32 \cdot 10^{10}$, dat bestaat uit 12 cijfers, maar kleiner dan $300^5 = 243 \cdot 10^{10}$ (dat bestaat uit 13 cijfers maar is te groot). We maken onze benadering wat fijner en merken op dat $250^5 = 5^5 \cdot 5^5 \cdot 10^5 = 3125^2 \cdot 10^5 = 9765625 \cdot 10^5$, juist iets kleiner is dan 10^{12}. We halen even het Binomium van Newton van onder het stof en schrijven $260^5 = 10^5 \cdot (25+1)^5 = 10^5 \cdot (25^5 + 5 \cdot 25^4 + 10 \cdot 25^3 + 10 \cdot 25^2 + 5 \cdot 25 + 1)$. Deze berekeningen met machten van 5 kunnen we weer uitbesteden aan verschillende teamleden en we krijgen $260^5 = 11881376 \cdot 10^5$. Dit is groter dan het gegeven getal 1143137652768.

We besluiten dat het getal dat we zoeken eindigt op een 8 en ligt tussen 250 en 260. Zo is er maar één: **258**.